Université Abdelmalek Essaadi
Ecole Nationale des Sciences Appliquées
Al Hoceima

AP1: Analyse 2 Année: 2019/2020

TD: Equations différentielles

séries $N°1$

Professeur A. MOUSSAID

EXERCICE 1 (Equations différentiellles à variables séparées)
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. $x + yy^{'} = 0$
2. $y^{'} - xy = x$
3. $(x+2)y^{'} + xy = 0$
4. $(x+1)y^{'} + y = (x+1)sin(x)$
5. $\begin{cases} (4-x^2)yy^{'} = 2(1+y^2) & ; \\ y(1) = 0, & . \end{cases}$
6. $\begin{cases} (y^{'} = x^2y + x^2 & ; \\ y(0) = 1, & . \end{cases}$

Solution
déjà fait

EXERCICE 2 (Equations différentiellles homogénes)
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. $x(2y-x)y^{'} - y^2 = 0$
2. $y^2 + (x^2 - xy)y^{'} = 0$
3. $xy^{'} - y = \sqrt{x^2+y^2}$
4. $(x^2+y^2) - xyy^{'} = 0$

Solution
déjà fait

EXERCICE 3 (M.V.C)
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. $\begin{cases} (y^{'} + y = xe^{-x} & ; \\ y(0) = 1, & . \end{cases}$
2. $y^{'} - 2y = \frac{-2}{-+e^{-2x}}$
3. $(sin(x))y^{'} - (cos(x))y = x, \quad sur \quad I =]0, \frac{\pi}{2}[$
4. $y^{'} - 2xy = -(2x-1)e^{x}$
5. $(1+x)y^{'} + y = 1 + ln(1+x), \quad sur \quad I =]-1, +\infty[$

Solution
déjà fait

Exercice 4
recollement tous les cas ces possibles. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentiellles suivantes:

1. $xy^{'} - 2y = x^3$
2. $(1-x)y^{'} - y = x$
3. $xy^{'} + y - 1 = 0$

Solution
déjà fait

Exercice 5 (Equations différentiellles linéaires du premier ordre avec second membre et à coefficients consta
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. $y^{'} + 2y = x^2 + 2x + 3$
2. $y^{'} + y = xe^{-x}$
3. $y^{'} + 2y = cos(x) + 2sin(x)$
4. $y^{'} - y = (x+1)e^x$
5. $y^{'} + y = x - e^x + cos(x)$

Solution
déjà fait

Exercice 6 (Equations de Bernoulli.)
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. *cherche les solutions positives de*
$$y^{'} + 2y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$
2. *résoudre les équations suivantes*
$$y^{'} + y + y^2 = 0$$
$$y^{'} - y = xy^2$$

Solution
déjà fait

Exercice 7 (Equation du second ordre à coefficients constants.)
Résoudre les équations différentiellles suivantes:

1. $y^{''} - 2y^{'} + 10y = x \qquad y(0) = 1$ *et* $y^{'}(0) = 2$
2. $y^{''} + y = x^2 - 1$
3. $y^{''} - 4y^{'} + 4y = e^x$
4. $y^{''} - 4y^{'} + 3y = (2x+1)e^x$
5. $y^{''} - 4y^{'} + 3y = (2x+1)e^{-x}$
6. $y^{''} - 5y^{'} - 14y = (3x^2 + 2x - 1)e^x$
7. $y^{''} - y^{'} - 6y = (x^2+1)e^{3x}$
8. $y^{''} - 2y^{'} + y = (x^2+1)e^x + e^{3x}$
9. $y^{''} - 2y^{'}2y = 2cos(x) - sin(x)$
10. $2y^{''} + y^{'} - y = 3cos(2x) - sin(2x)$

11. $y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^{x}cos(2x) + 5x + 3$

12. $y^{''} + y = \frac{1}{sin^3(x)}$

Solution

1- Soit (E): $y^{''} - 2y^{'} + 10y = x \qquad y(0) = 1$ et $y^{'}(0) = 2$

1^{ere} étape:

On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).

Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{"} - 2y^{'} + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 - 2r + 10 = 0$$

Alors

$$\Delta = -36$$

Donc (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = 1 + 3i$ et $r_2 = 1 - 3i$

Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = e^x[A\cos(3x) + B\sin(3x)]$$

2^{me}étape: On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme le second membre de (E) sous forme d'un polynôme de degré 1 et le coefficient de y dans l'équation (E) $\neq 0$, alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 1.

Soit $y_p(x) = ax + b$ est une solution de (E) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -2a + 10ax + 10b = x \Leftrightarrow a = \frac{1}{10} \quad et \quad b = \frac{1}{50}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = e^x[A\cos(3x) + B\sin(3x)] + (\frac{1}{10}x + \frac{1}{50})$$

Si on ajoute les conditions $y(0) = 1$ et $y^{'}(0) = 2$

On a alors

$$y^{'}(x) = e^x[(A + 3B)\cos(3x) + (B - 3A)\sin(3x)] + (\frac{1}{10})$$

Les conditions initiales fournissent le système :

$$\begin{cases} y(0) = A + \frac{1}{50} = 1 \\ y^{'}(0) = A + 3B + \frac{1}{10} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{49}{50} \\ B = \frac{23}{75} \end{cases}$$

La solution de (E) qui vérifie les conditions initiales est donc :

$$y = e^x[\frac{49}{50}cos(3x) + \frac{23}{75}sin(3x)] + (\frac{1}{10}x + \frac{1}{50})$$

2- Soit (E):$y^{''} + y = x^2 - 1$

1^{ere} étape:

On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).

Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{"} + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 + 1 = 0$$

Donc (E_c) admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = i$ et $r_2 = -i$
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = A\cos(x) + B\sin(x)$$

2^{me}étape: On cherche une solution particulier de l'équation (E).
Comme le second membre de (E) sous forme d'un polynôme de degré 2 et le coefficient de y dans l'équation (E) $\neq 0$, alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 2.
Soit $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ est une solution de (E) si et seulement si

$$ax^2 + bx + (2a + c) = x^2 - 1 \Leftrightarrow a = 1 \quad et \quad b = 0 \quad et \quad c = -3$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = A\cos(x) + B\sin(x) + (x^2 - 3)$$

3-(E) $\qquad y^{''} - 4y^{'} + 4y = e^x$

1^{ere} étape:
On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{''} - 4y^{'} + 4y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 - 4r + 4 = 0$$

Alors

$$\Delta = 0$$

dont 2 est racine double de (E_c) .
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = e^{2x}[A + Bx]$$

2^{me}étape:
On cherche une solution particulier de l'équation (E).
Comme 1 n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c) , on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha e^x$ En dérivant, on trouve $\alpha = 1$ d'où

$$y_p(x) = e^x$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = e^x + e^{2x}[A + Bx] \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$$

4- (E) $\qquad y^{''} - 4y^{'} + 3y = (2x + 1)e^x$
1^{ere} étape:
On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{''} - 4y^{'} + 3y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 - 4r + 3 = 0$$

Alors
$$\Delta = 4$$
dont les racines de (E_c) sont 1 et 3. .
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme
$$y_0 = Ae^x + Be^{3x} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^{\nvDash}$$

2^{me}étape:
On cherche une solution particulier de l'équation (E).

Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique (E_c) , on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx)e^x$ (on peut trouver un polynôme sans terme constant car la fonction $x \to e^x$ est solution de l'équation homogène).

En dérivant, on trouve $a = \frac{-1}{2}$ et $b = 1$ d'où
$$y_p(x) = (\frac{-1}{2}x^2 + x)e^x$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme
$$y = (\frac{-1}{2}x^2 + x)e^x + Ae^x + Be^{3x} \qquad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

5-$y^{''} - 4y^{'} + 3y = (2x + 1)e^{-x}$

L'équation homogène a déjà été résolue à la question précédente. Pour résoudre l'équation avec second membre, on remarque que -1 n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = (ax + b)e^{-x}$
En dérivant, on trouve $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{5}{16}$ d'où
$$y_p(x) = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x}$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme
$$y = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{16})e^{-x} + Ae^x + Be^{3x} \qquad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Equation 6 et 7 comme les équations 3, 4 et 5 .

8-(E) $\quad y^{''} - 2y^{'} + y = (x^2 + 1)e^x + e^{3x}$

1^{ere} étape:
On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec
$$(E_0): \qquad y^{''} - 2y^{'} + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est
$$(E_c): \qquad r^2 - 2r + 1 = 0$$

Alors
$$\Delta = 0$$
Alors l'équation caractéristique (E_c) admet 1 comme racine double
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme
$$y_0 = (Ax + B)e^x \qquad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2^{me}étape:
On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) en utilisant le principe de superposition des solutions.
* On commence donc à chercher une solution de
$$(E_1) \quad y^{''} - 2y^{'} + y = (x^2 + 1)e^x$$
On la cherche sous la forme d'une exponentielle polynôme
$$y_{1p} = P(x)e^x$$
.

Comme 1 est racine simple de l'équation caractéristique (E_c), on sait qu'on va trouver une solution avec un polynôme P de degré inférieur ou égal à 4. on trouve
$$P^{"}(x)e^x = (x^2 + 1)e^x$$
On obtient
$$P(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2}$$
d'où
$$y_{1p}(x) = (\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2})e^x$$

**On cherche maintenant une solution particulière de
$$(E_2) \quad y^{''} - 2y^{'} + y =)e^{3x}$$
Cette fois, 3 n'est pas racine de l'équation caractéristique (E_c), et on peut chercher une solution particulière sous la forme
$$y_{2p} = \alpha e^{3x}$$
. On obtient, en introduisant dans l'équation
$$9\alpha - 6\alpha + \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4}$$
d'où
$$y_{2p}(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$$
. Donc la solution particulière de (E) est:
$$y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}$$
Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions
$$y = (\frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2})e^x + \frac{1}{4}e^{3x}(Ax + B)e^x \qquad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Rq: l'équation 9 comme l'équation 10

10-$2y^{''} + y^{'} - y = 3cos(2x) - sin(2x)$

1^{ere} étape:
On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad 2y^{''} + y^{'} - y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad 2r^2 + r - 1 = 0$$

Alors

$$\Delta = 9$$

dont les racines de (E_c) sont -1 et $\frac{1}{2}$.
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

2^{me}étape:
On cherche une solution particulier de l'équation (E).

on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$
En dérivant, on trouve $\alpha = \frac{-5}{17}$ et $\beta = \frac{3}{17}$ d'où

$$y_p(x) = \frac{-5}{17}\cos(2x) + \frac{3}{17}\sin(2x)$$

Donc les solutions de l'équation (E) sont donc les fonctions de la forme

$$y = \frac{-5}{17}\cos(2x) + \frac{3}{17}\sin(2x) + Ae^{-x} + Be^{\frac{x}{2}} \qquad (A, B) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

11- (E): $\quad y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^x cos(2x) + 5x + 3$

1^{ere} étape:
On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{''} - 2y^{'} + 5y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 - 2r + 5 = 0$$

Alors

$$\Delta = -16$$

Alors les racines de l'équation caractéristique (E_c) sont $r_1 = 1 - 2i$ et $r_2 = 1 + 2i$
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = (A\cos(2x) + B\sin(2x))e^x \qquad (A, B) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

2^{me}étape:
On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) en utilisant le principe de superposition des solutions.
* On commence donc à chercher une solution de

$$(E_1) \quad y^{''} - 2y^{'} + 5y = 5x + 3$$

Comme le second membre de (E_1) sous forme d'un polynôme de degré 1 et le coefficient de y dans l'équation (E_1) $\neq 0$, alors on va chercher une solution particulier sous la forme d'un polynôme de degré 1.
Soit $y_{1p}(x) = ax + b$ est une solution de (E_1) si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -2a + 5ax + 5b = 5x + 3 \Leftrightarrow a = 1 \quad et \quad b = 1$$

d'où

$$y_{1p}(x) = x + 1$$

**On cherche maintenant une solution particulière de

$$(E_2) \quad y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^{x}cos(2x)$$

On va en fait chercher une solution particulière de $y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^{(1+2i)x}$ et on en prendra la partie réelle. $1 + 2i$ est un solution de l'équation caractéristique (E_0) , on cherche une solution sous la forme

$$x \to (ax^2 + bx)e^{(1+2i)x}$$

Après dérivation et identification, on trouve $a = \frac{-i}{8}$ et $b = \frac{1}{16}$

d'où

$$x \to (\frac{-i}{8}x^2 + \frac{1}{16}x)e^{(1+2i)x}$$

. Prenant la partie réelle, une solution particulière de

$$(E_2) \quad y^{''} - 2y^{'} + 5y = xe^{x}cos(2x)$$

est obtenue par

$$y_{2p} = [\frac{x}{16}\cos(2x) + \frac{x^2}{8}\sin(2x)]e^{x}$$

Donc la solution particulière de (E) est:

$$y_p(x) = y_{1p}(x) + y_{2p}$$

Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y = y_p(x) + y_0(x)$$

11- (E): $y^{''} + y = \frac{1}{sin^3(x)}$

1^{ere} étape:

On commence par résoudre l'équation homogène (E_0) associée à (E).
Soit (E_0) l'équation homogène associée à (E)avec

$$(E_0): \qquad y^{''} + y = 0$$

Donc l'équation caractéristique associée est

$$(E_c): \qquad r^2 + 1 = 0$$

Alors les racines de l'équation caractéristique (E_c) sont $r_1 = i$ et $r_2 = -i$
Alors les solutions générales de l'équation (E_0) sont de la forme

$$y_0 = A\cos(x) + B\sin(x) \qquad (A, B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

2^{me}étape:

On cherche une solution particulière de l'équation générale (E) sous la forme , $y_p(x) = A(x)y_1 + B(x)y_2$ avec $A^{'}(x)y_1 + B^{'}(x)y_2 = 0$ telque $y_1 = \cos(x)$ et $y_2 = \sin(x)$
Donc, $A^{'}(x)$ et $B^{'}(x)$ sont solutions du systéme:

$$\begin{cases} A^{'}(x)\cos(x) + B^{'}(x)\sin(x) = 0 \\ -A^{'}(x)\sin(x) + B^{'}(x)\cos(x) = \frac{1}{sin^3(x)} \end{cases}$$

donc

$$A^{'}(x) = \frac{-1}{W(x)}(\frac{1}{sin^3(x)} \times \sin(x)) \quad et \quad B^{'}(x) = \frac{1}{W(x)}(\frac{1}{sin^3(x)} \times \cos(x))$$

en effet leur wronskien vaut $W(x) =?1$.
alors

$$A^{'}(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} \quad et \quad B^{'}(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^3(x)}$$

avec les primitives on trouve

$$A(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad et \quad B(x) = \frac{-1}{2\sin^2(x)}$$

On a donc la solution particuliére

$$y_p(x) = \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} + \frac{-\sin(x)}{2\sin^2(x)} = \frac{\cos(2x)}{2\sin(x)}$$

Les solutions générale de l'équation (E) sont donc les fonctions

$$y = y_p(x) + y_0(x)$$